

Titolo del Progetto di Ricerca

Interpolazione di mesh a topologia arbitraria con vincoli di regolarità, di forma e di fairness

Interpolation of arbitrary-topology meshes with smoothness, shape and fairness constraints

Descrizione del Progetto di Ricerca

Attualmente sono numerose e svariate le applicazioni in cui si fa uso di rappresentazioni virtuali di oggetti reali. Si pensi, ad esempio, al design industriale, all'industria manifatturiera, alla stampa 3D, ai beni culturali, alla prototipazione rapida, alla computer graphics, all'animazione, ai videogiochi, alla realtà virtuale, alla medicina. Gli oggetti impiegati in tali applicazioni sono estremamente complessi dal punto di vista della geometria e nella maggiorparte dei casi devono rispettare requisiti stringenti riguardanti le proprietà della superficie che li rappresenta. La complessità della geometria deriva dal fatto che le superfici degli oggetti da realizzare hanno genere topologico arbitrario maggiore di uno (dove il genere di una superficie è informalmente il numero di manici che questa contiene). I requisiti che le superfici di tali oggetti devono rispettare riguardano invece regolarità, ordine di approssimazione o precise specifiche di forma.

Il principale obiettivo di questo progetto è sviluppare nuovi metodi numerici per la costruzione di superfici a topologia arbitraria che interpolino i vertici di una mesh poligonale assegnata e rispettino certi requisiti di regolarità e forma dettati dal contesto in cui la superficie deve essere impiegata. Si tratta di un problema di fondamentale importanza sia teorica che pratica, che ha impegnato numerosi ricercatori nel corso dell'ultimo ventennio. Le più recenti attività di ricerca in questo ambito hanno riguardato sia l'utilizzo di schemi di suddivisione scalari [2,16] o vettoriali [1], che metodi di interpolazione locale in spazi spline di tipo polinomiale [3,4].

Gli schemi di suddivisione sono metodi iterativi che generano superfici a topologia arbitraria come limite di una sequenza di raffinamenti applicati ad una mesh poligonale assegnata. Benché non soggetti a restrizioni sulla topologia dei punti iniziali, il carattere ricorsivo di questi metodi fa sì che sia difficile determinare le proprietà analitiche della superficie limite quali, per esempio, continuità e ordine di approssimazione. Per questo motivo lo studio di approcci teorici adeguati per l'analisi di schemi di suddivisione è ancora particolarmente attuale, soprattutto nel caso multivariato e non stazionario. In tale ambito l'obiettivo è cercare di ottenere regolarità C^2 ovunque, anche in corrispondenza dei cosiddetti elementi (vertici o facce) straordinari della mesh. I risultati più recenti della letteratura hanno riguardato esclusivamente schemi di suddivisione non interpolatori [7,8,9,14]. Questo è uno dei motivi per cui lo studio di schemi di suddivisione interpolatori risulta essere particolarmente interessante, anche in virtù del fatto che, a differenza degli schemi approssimanti, questi seguono fedelmente i dati iniziali senza subire effetti di "restringimento" (shrinkage). Nell'ambito degli schemi di suddivisione interpolatori, è nostra intenzione esplorare anche l'esistenza di algoritmi duali. Ad oggi, gli schemi bivariati duali presenti in letteratura [6,10,15], consentono di generare solo superfici non-interpolatorie, mentre tutte le superfici di suddivisione di tipo interpolatorio note sono ottenute da schemi primali [2,16]. Anche passando dagli schemi bivariati scalari a quelli vettoriali che risolvono problemi di interpolazione di punti e normali [1], gli unici esempi di schemi noti sono tutti di tipo primale. Sebbene negli ultimi anni siano stati effettuati importanti passi avanti nell'ambito degli schemi duali per l'interpolazione [11,13], il caso multivariato non è ancora mai stato oggetto di studio e verrà quindi trattato per la prima volta nel corso di questo progetto. Più specificatamente, il piano dettagliato delle attività previste nell'ambito di questo progetto è descritto nel prossimo paragrafo.

Piano di Attività

Nell'ambito di questo progetto abbiamo intenzione di concentrare le attività di ricerca all'interno della classe delle funzioni a supporto compatto per la risoluzione di problemi di interpolazione multivariata. Particolare attenzione sarà rivolta alla costruzione di funzioni base ottenibili sia mediante l'applicazione di schemi di suddivisione (scalari o vettoriali) che mediante un approccio

"continuo" che generalizza i risultati in [4]. In particolare, le tematiche di ricerca che saranno affrontate nel corso del progetto riguardano:

- (i) la proposta di schemi di suddivisione interpolatori duali per mesh quadrilatere, che non siano il prodotto tensore di schemi univariati, ma siano ottenibili mediante l'estensione multivariata dell'approccio costruttivo proposto in [13];
- (ii) la ricerca di schemi di suddivisione duali per mesh esagonali con particolare interesse per la sottoclasse interpolatoria;
- (iii) lo studio di schemi di suddivisione per griglie triangolari 3-direzionali o 4-direzionali (criss-cross), ottenuti a partire dal raffinamento di box-spline a tre o quattro direzioni;
- (iv) la generalizzazione dei processi di suddivisione ai punti (i), (ii) e (iii) per l'applicazione a mesh poligonali a topologia arbitraria;
- (v) l'estensione delle funzioni cardinali univariate proposte in [4] al caso di mesh quadrilatere e triangolari a topologia arbitraria.

La fase finale del progetto sarà dedicata alla verifica dei vantaggi offerti dalle superfici di interpolazione proposte rispetto ai metodi già presenti in letteratura, con particolare attenzione al loro utilizzo multidisciplinare nel contesto, per esempio, della segmentazione di immagini biomediche dove attualmente sono impiegati schemi di suddivisione con forti limitazioni in termini di regolarità, fairness o tipo di vertici straordinari consentiti [5,12].

Bibliografia

- [1] Aihua, M., Jie, L., Jun, C. and Guiqing, L.: A new fast normal-based interpolating subdivision scheme by cubic Bézier curves. *The Visual Computer* 32(9) (2016) 1085–1095
- [2] Andersson, L.-E., Stewart, N.F.: *Introduction to the Mathematics of Subdivision Surfaces*. SIAM, 2010
- [3] Antonelli, M., Beccari, C.V., Casciola, G.: High quality local interpolation by composite parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 46 (2016) 103-124
- [4] Antonelli, M., Beccari, C.V., Casciola, G.: A general framework for the construction of piecewise-polynomial local interpolants of minimum degree. *Advances in Computational Mathematics* 40(4), (2014) 945-976
- [5] Badoual, A., Novara, P., Romani, L., Schmitter, D., Unser, M.: A non-stationary subdivision scheme for the construction of deformable models with sphere-like topology. *Graphical Models* 94 (2017) 38-51
- [6] Fang, M., Ma, W., Wang, G.: A generalized surface subdivision scheme of arbitrary order with a tension parameter. *Comput. Aided Design* 49 (2014) 8–17
- [7] Gérot, C., Destelle, F., Montanvert, A.: Smoothing the antagonism between extraordinary vertex and ordinary neighbourhood on subdivision surfaces. In: Dæhlen M., Floater M., Lyche T., Merrien JL., Mørken K., Schumaker L.L. (eds) *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. MMCS 2008. *Lecture Notes in Computer Science*, vol 5862, 242-260, Springer
- [8] Lai, S., Cheng, F.: Explicit construction of C^2 surfaces for meshes of arbitrary topology. *Computer-Aided Design & Applications* 14(6), (2017) 805–814
- [9] Lian, J., Yang, Y.: A new cross subdivision scheme for surface design. *J. Math. Anal. Appl.* 374 (2011) 244–257
- [10] Romani, L.: A Chaikin-based variant of Lane-Riesenfeld algorithm and its non-tensor product extension. *Computer Aided Geometric Design* 32 (2015) 22-49
- [11] Romani, L.: Interpolating m-refinable functions with compact support: the second generation class. *Applied Mathematics and Computation* 361 (2019) 735-746

- [12] Romani, L., Badoual, A., Unser, M.: Normal-based interpolating subdivision for the geometric representation of deformable models. In 2019 IEEE 16th International Symposium on Biomedical Imaging, 2019, pp. 1839-1843
- [13] Romani, L., Viscardi, A.: Dual univariate interpolatory subdivision of every arity: Algebraic characterization and construction. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 484 (2020) 123713
- [14] Sabin, M.: Towards subdivision surfaces C^2 everywhere. In: Floater M., Lyche T., Mazure ML., Mørken K., Schumaker L. (eds), *Mathematical Methods for Curves and Surfaces. MMCS 2016. Lecture Notes in Computer Science*, vol 10521. Springer, 2017
- [15] Stam, J.: On subdivision schemes generalizing uniform B-spline surfaces of arbitrary degree. *Computer Aided Geometric Design* 18(5) (2001) 383-396
- [16] Zhang, B., Zheng, H., Song, W., Lin, Z., Zhou, J.: Interpolatory subdivision schemes with the optimal approximation order. *Applied Mathematics and Computation* 347 (2019) 1–14